

计及轴向力影响的传递矩阵精确公式

南华动力机械研究所 李 彦**

【摘要】 在计及轴向力作用并考虑剪切变形的情况下, 本文对转子轴段的受力与变形状态进行了较为细致的分析, 导出了两种不同形式的等直截面轴段传递矩阵精确公式。实例分析及其与实验结果的对比, 不仅表明了轴向力对转子支承系统的动力特性确实存在着不宜忽略的影响, 同时也验证了精确公式的良好准确性。

关键词: 转子动力学 振动 传递矩阵法 轴向预紧力

文中导出的两种不同形式的等直截面轴段传递矩阵精确公式, 不仅扩大了传递矩阵法的应用价值和范围, 使其能够更加有效地用于受轴向力作用的转子支承系统的动力特性分析, 同时也为解决小型桨轴发动机研制设计中所特有的工程实际问题提供了方便的手段。

1 理论分析

轴向力的存在将引起转子抗弯刚度的变化, 这正是轴向力对转子支承系统的动力特性产生影响的根本原因。因此, 为使传递矩阵法能够计及轴向力的影响, 必须而且仅需对轴段传递矩阵(即场矩阵)进行必要的改进。

在轴向力作用下, 转子轴段的受力与变形状态可用图 1 中(a)和(b)所示的不同方式来描述。由于轴段的横向振动对其轴向变形的影响可忽略不计, 故轴向力 H 的大小也可视为不随系统弯曲振动过程而变化的常数。

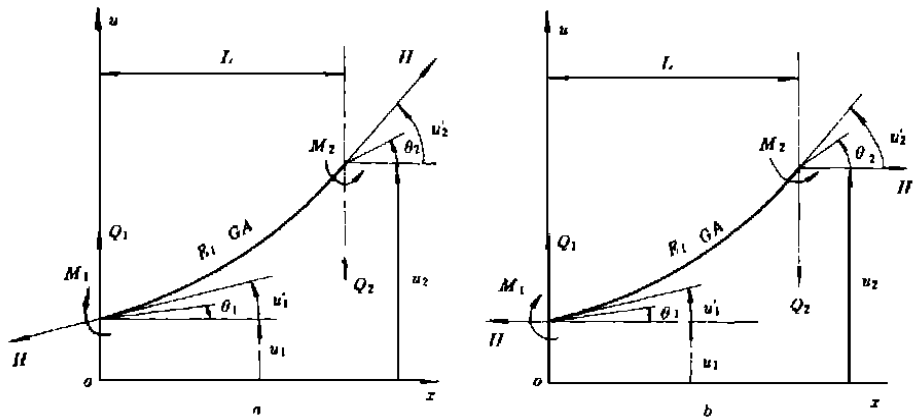


图 1 受轴向力作用时轴段受力与变形状态

图 1(a) 和(b) 所示的轴段与其相对应的微元体的受力与变形状态如图 2(a) 和(b) 所示。

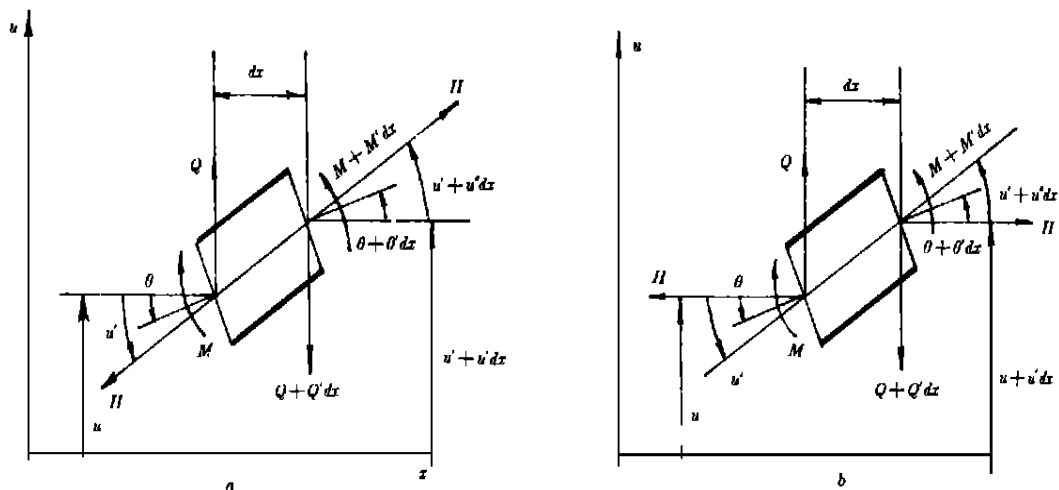


图 2 轴段微元体受力与变形状态

在考虑剪切变形的情况下, 图 2(a) 和(b) 所示的微元体平衡与变形方程为:

$$Q - (Q + Q'dx) + H(u' + u''dx) - Hu' = 0 \quad (1)$$

$$(M + M'dx) - M - (Q + Q'dx)dx = 0$$

$$M/(EI) = \theta', \quad u' = \theta - \beta Q/(GA) \quad (2)$$

其中 β 为截面剪切变形系数。

对式(1) 进行整理并略去高阶微量后与式(2) 联立可得:

$$\theta' = Hu', \quad M = Q, \quad M = EI\theta', \quad u' = \theta - \beta M/(GA) \quad (3)$$

对于图 2(b) 所示的微元体, 其平衡与变形方程为:

$$\begin{cases} Q - (Q + Q'dx) = 0 \\ (M + M'dx) - M - (Q + Q'dx)dx - H(u + u'dx - u) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$M/(EI) = \theta', \quad u' = \theta - \beta Q/(GA) - \beta Hu'/(GA) \quad (5)$$

由式(4)、式(5) 联立, 略去高阶微量并整理可得:

$$Q' = 0, \quad M' = Q + Hu', \quad M = EI\theta', \quad u' = \theta - \beta M/(GA) \quad (6)$$

对式(3) 和式(6) 进行变换, 均可得到如下微元体变形协调方程:

$$u^{(4)} - S^2 u'' = 0 \quad (7)$$

其中

$$S = \frac{H/(EI)}{1 + \beta H/(GA)} \quad (8)$$

对式(7) 进行求解可得:

$$u = C_1 x + C_2 + C_3 e^{Sx} + C_4 e^{-Sx} \quad (9)$$

利用式(3) 和式(9), 对于图 1(a) 所示方式有:

$$\begin{aligned} u &= C_1 x + C_2 + C_3 e^{Sx} + C_4 e^{-Sx}, \quad \theta = C_1 + (C_3 e^{Sx} - C_4 e^{-Sx})H/(SEI) \\ M &= H(C_3 e^{Sx} + C_4 e^{-Sx}), \quad Q = HS(C_3 e^{Sx} - C_4 e^{-Sx}) \end{aligned} \quad (10)$$

而利用式(6) 和式(9), 对于图 1(b) 所示方式有:

$$u = C_1 x + C_2 + C_3 e^{Sx} + C_4 e^{-Sx}, \quad \theta = C_1 + (C_3 e^{Sx} - C_4 e^{-Sx})H/(SEI)$$

$$M = H (C_3 e^{Sx} + C_4 e^{-Sx}) \quad , \quad Q = - H C_1 \quad (11)$$

另外, 根据图 1 可得边界条件:

$$x = 0 \quad , \quad u = u_1 \quad , \quad \theta = \theta_1 \quad , \quad M = M_1 \quad , \quad Q = Q_1 \quad (12)$$

$$x = L \quad , \quad u = u_2 \quad , \quad \theta = \theta_2 \quad , \quad M = M_2 \quad , \quad Q = Q_2 \quad (13)$$

由式 (10) 和式 (12) 可以解得:

$$\begin{aligned} C_1 &= \theta - \frac{1}{S^2 EI} Q_1 \quad , \quad C_2 = u_1 - \frac{1}{H} M_1 \\ C_3 &= \frac{1}{2H} \left[M_1 + \frac{1}{S} Q_1 \right] \quad , \quad C_4 = \frac{1}{2H} \left[M_1 - \frac{1}{S} Q_1 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

而由式 (11) 和式 (12) 则可解得:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{H} Q_1 \quad , \quad C_2 = u_1 - \frac{1}{H} M_1 \\ C_3 &= \frac{1}{2H} \left[M_1 + EIS \left[\frac{1}{H} Q_1 + \theta_1 \right] \right] \quad , \quad C_4 = \frac{1}{2H} \left[M_1 - EIS \left[\frac{1}{H} Q_1 + \theta_1 \right] \right] \end{aligned} \quad (15)$$

将式 (14) 代入式 (10) 并利用式 (13) 可得:

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + L\theta + \frac{1}{H} [ch(SL) - 1] M_1 + \frac{1}{HS} \left[sh(SL) - \frac{HL}{EIS} \right] Q_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + \frac{sh(SL)}{EIS} M_1 + \frac{ch(SL) - 1}{S^2 EI} Q_1 \\ M_2 = ch(SL) \cdot M_1 + \frac{sh(SL)}{S} Q_1 \\ Q_2 = S \cdot sh(SL) \cdot M_1 + ch(SL) \cdot Q_1 \end{cases} \quad (16)$$

写成矩阵形式即有:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{1}{H} [ch(SL) - 1] & \frac{1}{HS} \left[sh(SL) - \frac{HL}{EIS} \right] \\ 0 & 1 & \frac{sh(SL)}{EIS} & \frac{ch(SL) - 1}{S^2 EI} \\ 0 & 0 & ch(SL) & \frac{sh(SL)}{S} \\ 0 & 0 & Ssh(SL) & ch(SL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

同理, 将式 (15) 代入式 (11), 利用式 (13) 并写成矩阵形式可得:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{SEI}{H} sh(SL) & \frac{1}{H} [ch(SL) - 1] & \frac{1}{H} \left[\frac{SEI sh(SL)}{H} - L \right] \\ 0 & ch(SL) & \frac{sh(SL)}{EIS} & \frac{ch(SL) - 1}{H} \\ 0 & SEI sh(SL) & ch(SL) & \frac{SEI sh(SL)}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

至此, 即得到了分别与图 1(a) 与(b) 所示受力与变形描述方式相对应的两种不同形式的轴段传递矩阵精确公式。

2 应用分析与讨论

应用文中导出的精确公式对某涡轮发动机压气机试验件转子支承系统进行了临界转速分

析^[1]。该试验件转子采用典型的轴向预紧端齿连接的结构形式,其装配预紧力高达 72000N。当不计轴向力影响时,系统前 4 阶临界转速计算结果分别为 14074、33472、37801 和 58251 r/min,而计及轴向力作用(即同时考虑预紧拉杆中存在的拉力和转子主体中存在的压力)时,上述结果分别变成 22980、33588、51395 和 58326 r/min,故对该系统的前四阶临界转速而言,轴向力的影响分别约为 39%、0.3%、26% 和 0.03%。由此可见,在轴向预紧端齿连接的转子支承系统中,轴向预紧力对系统的各阶特征频率具有不同程度的影响,其中某些特征频率受轴向预紧力的影响十分明显。有关轴向预紧力对端齿连接转子支承系统各项动力特性的影响规律与程度,文献[2]提供了进一步的分析与研究结果。此外,根据静频试验结果^[3],上述系统的前 2 阶固有频率分别为 390Hz 和 520Hz(分别相当于 23400 r/min 和 31200 r/min),从而表明计算与试验结果之间具有良好的一致性。

必须指出,作为计及轴向力影响的传递矩阵精确公式,式(17)和式(18)虽然均可用于受轴向力作用的转子支承系统的动力特性分析,但它们却都必须在轴段中确实存在轴向力的情况下方可使用,对于不受轴向力作用的轴段,即 $H = 0$ 时,式(17)和式(18)将告失效。这是因为在 $H = 0$ 的情况下,轴段微元体的变形协调方程式(7)的形式及其解的特征将完全改变。此外,验算工作表明,当轴向力很小即 H 的值接近于零时,式(17)和式(18)中以 H 或 S 为分母的各分式元素的分子也随之接近于零,因而勿须担心数值失稳现象的出现。事实上,实际经验表明,当轴段中仅存在很小的轴向力时,轴段的抗弯刚度几乎不发生改变。因此,较小的轴向力对转子支承系统动力特性的影响往往可以忽略不计。

需要说明的是,式(17)与式(18)在形式上虽然存在着明显的差别,但比较式(3)和式(6)的不同之处可知,这是由于在图 1(a)和(b)所示的轴段受力与变形状态中剪力 Q 的含义不同所致。不过,式(7)的统一性却决定了分别采用这两种不同形式的公式进行系统动力特性计算时,所获结果在实质上并不存在差别。关于这一特点,实际应用结果也给予了充分的证明。

应当注意,尽管式(17)与式(18)仅存在形式上的差别,应用过程中可以任选其中之一,但却不能在同一条传递路线上将两个公式混合使用,否则将因剪力含义的混乱而导致分析结果的错误。

本文得到了尹泽勇研高工的热情帮助和指导,特表诚挚谢意!

参 考 文 献

- 1 李彦. 某机组合压气机试验件转子动力特性计算报告. 608 所科研报告, 1991
- 2 尹泽勇等. 轴向力随转速的变化及其对转子动力特性的影响. 第三届全国转子动力学学术研讨会, 1992
- 3 陈少红. 某机组合压气机振动试验报告. 608 所科研报告, 1990

(责任编辑 杨再荣)

VIBRATION CHARACTERISTICS OF MISTUNED DISK-BLADED

Yan Yunju and Gu Jialiu

(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

A mathematical model by Substructure Mode Synthesis Method is provided for coupling vibration of a mistuned disk-bladed. Several low order modes of each substructure are obtained by means of Experimental Modal Analysis and modifying calculation of the modes. Relying on the small perturbation of blade modal stiffness, real mistuned disk-bladed and several kinds of theoretical mistuned models are set up. Model parameters and mathematical formulas are checked by use of forced vibration experiment of a real mistuned disk-bladed on vibrostand. Analytical results well reveal that the mistuning of blades is the reason why resonant response of some blade on the same stage disk is much greater than other blades. The results also show that smaller frequency difference and random mistuning distribution of blades are eligible, and also give the rational range of rotating frequencies of an engine.

PRECISE TRANSFER MATRIX FORMULAE CONSIDERING AXIAL FORCES

Li Yan

(*Nanhua Power Plant mechanical Research Institute*)

ABSTRACT

Two precise transfer matrix formulae of different forms for analysis of shaft element with constant section parameters are derived which take axial forces and shearing deformation into account. Both of the formulae are applied to a practical example. The comparison between the results of the calculation and experimental data shows that the precision of the formulae is very well and that considerable axial forces do have a nonnegligible influence on dynamic properties of rotor-bases system. The presented formulae not only extend the application of the transfer matrix method, but also provide a convenient approach to solving the specific engineering problems in dynamic analysis of the rotor-bases system with considerable axial forces due to pre-pressed coupling curves in its assemblage.

STUDY ON CONTACT STRESSES OF CYLINDRICAL GEARS ACTED BY DYNAMIC LOADS

Liu Geng, Zhu Hao, Shen Yunwen (*Northwestern Polytechnical University*)

Gao Xiangqun (*Nanhua Powerplant Institute*)

ABSTRACT

An approach to local finite element mesh refinement is studied for three-dimensional elastic contact problems. The study shows that because of different acting loads the boundary conditions of the refinement model in contact problems are different in calculation at flexible matrices and contact stresses. On the basis of the approach, an effective method is provided for the calculation of the contact stresses of spur and helical gears during the whole engagement period. According to the position of contact lines in the action plane, the present method establishes the FE models of gears by a 3-D automatic mesh generation program. The load share ratios of gears and load distributions along the contact lines during the whole engagement period are then simultaneously calculated by using the coordinate systems of gear profile and the corresponding matrices of coordinate transformation. Furthermore, the local FE mesh refinement models of gears on a specific contact line are established and the detailed contact stress distributions of the contact line are evaluated with the use of finite element-mathematical programming technique. In this case, the calculations of contact stresses on different contact lines of gears during the whole engagement period can